



centre adscrit a:



UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA
BARCELONATECH

Seminari de Matemàtiques

Grau en Ciències i Tecnologies Aplicades
a l'Esport i al Fitnes

Curs 2018-19

Contingut

1	CÀLCUL ALGEBRAIC	2
1.1	Operacions amb fraccions	2
1.2	Propietats de les potències. Fórmules importants	2
1.3	Productes notables. Extracció de factor comú	4
1.4	Potències, arrels i logaritmes	5
2	CÀLCUL INFINITESSIMAL	7
2.1	Equacions i inequacions	7
2.2	Imatges i Dominis de Funcions	9
2.3	Representació Gràfica de Funcions	9
2.4	Càlcul de Derivades	11
2.5	Rectes Tangents	12
2.6	Determinació d'Extrems Relatius	13
2.7	Càlcul d'Integrals	13
2.8	Càlcul d'Àrees.	14
3	ÀLGEBRA LINEAL	15
3.1	Operacions amb Matrius.	15
3.1	Operacions amb Determinants.	16
3.3	Matrius inverses.	17
3.5	Sistemes d'equacions.	18

1 CÀLCUL ALGEBRAIC

1.1 Operacions amb fraccions

1) Efectueu les operacions que s'indiquen amb les fraccions següents:

a) $\frac{4}{7} \cdot \frac{5}{3} - \frac{17}{21} + \frac{5}{3} =$

b) $\left(\frac{4}{7} + \frac{2}{7}\right) \frac{7}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5}{7} =$

c) $\left(\frac{3}{5} : \frac{2}{7} - \frac{11}{20}\right) \frac{2}{3} - \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} - 2\right) + \frac{11}{24} =$

d) $\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\right) \frac{4}{7} + \frac{5}{21} - \frac{15}{21} =$

e) $\frac{11}{4} \cdot \frac{5}{3} - \frac{7}{3} + \frac{3}{4} =$

1.2 Propietats de les potències. Fórmules importants

2) Escriviu en forma d'una única potència

a) $4^3 4^5 4^2$

b) $5^4 5$

c) $x^2 x^3 x^6$

d) $\frac{4^5}{4^2}$

e) $\frac{x^7}{x^3}$

f) $(3^2)^4$

g) $(x^2)^7$

h) $(3x)^2$

i) $(5x^2)^4$

3) Escriviu en forma de potència d'exponent positiu

a) 3^{-4}

b) 5^{-3}

c) 10^{-6}

4) Escriviu com a potència de x:

a) $x^4 \cdot x^{-5}$

b) $\frac{x^5}{x^{-3}}$

c) $(x^{-6})^{-2}$

d) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}$

1.3 Productes notables. Extracció de factor comú

5) Desenvolpeu els productes i potències següents:

a) $(x + y)(x - y)$.

b) $(a + b)^2 \cdot (a - b)^2$.

c) $(2x - 2y)^2$.

d) $(x + 3y)^2$.

e) $(2x - 4)(2x + 4)$.

f) $\left(\frac{1}{2}x + 2\right)^2$.

g) $(a - b)^3$.

h) $[(x + y)^2 + z]^2$.

6) Descomponeu en el major nombre de factors possible cada una de les

següents expressions:

a) $3x^3y^3 - 3x^2y^2 + 12xy.$

b) $c^2(y+z)^2 - d^2(y+z)^2.$

c) $ax^2 + bx^2 - a - b.$

d) $ab^2 - b^2c - ad + cd.$

e) $a^2 - b^2 + ac - b.$

7) Simplifiqueu les fraccions següents

a) $\frac{a}{a^2+ab}$

b) $\frac{mn-rs}{amn-ars}$

c) $\frac{3y+1}{9y^2-1}$

d) $\frac{a-2}{a^2-4a+4}$

1.4 Potències, arrels i logaritmes

8) Escriviu en forma de potència les arrels següents

a) $\sqrt[4]{23}$

b) $\sqrt[3]{4^2}$

c) $\sqrt[5]{3^4}$

d) $\sqrt[4]{5^7}$

9) Calculeu les potències següents:

a) $(4 + \sqrt{5})^2$

b) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$

10) Calculeu els logaritmes següents:

a) $\log(1000)$

b) $\log_2(16)$

c) $\log_3(\sqrt[5]{81})$

d) $\log_{1/2}(32)$

e) $\log(0,0001)$

11) Trobeu el valor de x a les igualtats següents:

a) $\log_x \frac{1}{\sqrt{8}} = -\frac{3}{2}$

b) $\log_{25} \frac{1}{5} = x$

c) $\log_x 25 = -4$

d) $\log_x 125 = \frac{3}{2}$

2 CÀLCUL INFINITESSIMAL

2.1 Equacions i inequacions

1) Resoleu les equacions següents:

a) $17x - 114 = 98 - 7x$

b) $100t - 1 = 2t + 391$

c) $9x - 3(5x - 6) = -30$

d) $5(5 - 2x) - 7(2x - 5) = 12$

e) $\frac{3y}{4} - \frac{4y}{5} + 8 = y - 55$

f) $\frac{x-2}{3} + \frac{x-4}{5} = \frac{x-6}{7}$

g) $\frac{5(2x-1)}{2} = 4x + \frac{15}{2}$

h) $\frac{2x-6}{3x-8} = \frac{2x-5}{3x-7}$

2) Resoleu les equacions de segon grau següents:

a) $x^2 - 8x + 12 = 0$

b) $x^2 - 18x + 77 = 0$

c) $x^2 - 17 = 130 - x^2$

d) $x^2 + 2x + 1 = 0$

e) $5x^2 + 20x = 0$

f) $x^2 + x + 1 = 0$

g) $\frac{x-5}{2} = \frac{2}{x-2}$

h) $(x+2)^2 = 24 - 4x$

i) $(x+6)(x-6) - 8 = 1 - 4x$

j) $\frac{x}{5} - \frac{4}{x-9} = \frac{7}{3}$

- 3) La *raó àuria* és un nombre positiu que, entre d'altres propietats, presenta la peculiaritat que en restar-li la unitat s'obté el seu invers. Trobeu-lo.
- 4) La suma de dos nombres és 5 i el seu producte $-\frac{119}{4}$. Calculeu-los.
- 5) Determineu tots els valors de x que compleixen les desigualtats següents:
- a) $3x - 2 < x$
 - b) $7x - 9 > 4x$
 - c) $\frac{2}{3}(4x - 6) + \frac{1}{2}(3x + 2) \leq \frac{3}{4}(3x - 7)$
 - d) $\frac{3}{4} < \frac{2}{3} - \frac{5}{6}x \leq \frac{9}{4}$
 - e) $x^2 > 2x + 3$
 - f) $4 + 19x - 5x^2 \geq 0$
 - g) $(x - 1)(1 - 3x) < 0$
 - h) $x^3 - 4x^2 - 5x \leq 0$
 - i) $x - 2 > \frac{1}{x+2}$
 - j) $\frac{x-3}{2x-2} \leq 1$
 - k) $\frac{3x-2}{5-3x} \geq 1$

2.2 Imatges i Dominis de Funcions

- 6) Calculeu la imatge dels números que s'indiquen en cadascuna de les funcions següents
- a) $f(x) = x^2$, $x = 2$, $x = -3$.
 - b) $f(x) = 2 - x + 5x^2$, $x = 0$, $x = 1$.
 - c) $f(x) = \frac{3+x^2}{4-x}$, $x = 1$, $x = 4$
 - d) $f(x) = \sqrt{6 - 2t}$, $t = 5$, $t = -5$

$$\text{e) } f(x) = \sqrt[3]{4+x}, x=0, x=4$$

$$\text{f) } f(x) = \sqrt[3]{3-5x}, x = \frac{3}{5}, x = 6$$

$$\text{g) } f(x) = \ln(x+1), x=0, x=1$$

$$\text{h) } f(x) = \frac{4+2t}{\sqrt{t^3+1}}, t=1, t=0$$

$$\text{i) } f(x) = \frac{u^2-1}{u^2+1}, u=2, u=-2$$

$$\text{j) } f(x) = \sin(x^2), x=0, x=\pi$$

7) Trobeu el domini de les funcions que segueixen

$$\text{a) } f(x) = 2x - 1$$

$$\text{b) } f(x) = 4x^3 - 2x + 3$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{2+x}{x-3}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x+6}{x^2-4}$$

$$\text{e) } f(x) = \sqrt{2+x}$$

$$\text{f) } f(x) = \sqrt{x^2-9}$$

$$\text{g) } f(x) = \sqrt[3]{4x+1}$$

$$\text{h) } f(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{x-5}$$

$$\text{i) } f(x) = \ln(3x+5)$$

$$\text{j) } f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$\text{k) } f(x) = e^{2x+1}$$

2.3 Representació Gràfica de Funcions

8) Representeu aproximadament les gràfiques de les funcions següents:

$$\text{a) } f(x) = 2x - 4$$

$$\text{b) } f(x) = 3 - x$$

c) $f(x) = 3x + 9$

d) $f(x) = -2x + 8$

9) Representeu aproximadament les gràfiques de les funcions següents:

a) $f(x) = x^2 + x - 6$

b) $f(x) = -x^2 + 3x + 10$

10) Representeu aproximadament la gràfica de la funció polinòmica $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

11) Feu el mateix per a $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

2.4 Càlcul de Derivades

12) Calculeu la derivada de les funcions següents:

- | | | |
|--|---|---|
| (1) $f(x) = 3$ | (2) $f(x) = 4x + 2$ | (3) $f(x) = x^2 - 5x + 3$ |
| (4) $f(x) = 4x^2 - 7x$ | (5) $f(x) = 3e^x + 2x + 4$ | (6) $f(x) = \ln x - 3x + 12$ |
| (7) $f(x) = \ln 24$ | (8) $f(x) = \sqrt{x} + 3x^2$ | (9) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ |
| (10) $f(x) = x^2 - \ln x + \sqrt{x} + 25$ | (11) $f(x) = (2x + 1)^3$ | (12) $f(x) = (4x^2 - 3x + 2)^{100}$ |
| (13) $f(x) = (3x + 6)^4$ | (14) $f(x) = (1 - 4x^2)^7$ | (15) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 7x + 2}$ |
| (16) $f(x) = \sqrt[3]{2x^4 + 5x - 6}$ | (17) $f(x) = \ln(2x + 6)$ | (18) $f(x) = 3 \ln(4 - x)$ |
| (19) $f(x) = \ln \sqrt{4x^3 + 6x^2 - 2}$ | (20) $f(x) = 2x^3 - \ln \sqrt[3]{4x^2}$ | (21) $f(x) = e^{2x+5}$ |
| (22) $f(x) = 4e^{x^2-3x+1}$ | (23) $f(x) = 6e^{1-x^2}$ | (24) $f(x) = e^{4x+2} - \ln(3x^2 +$ |
| (25) $f(x) = (2x + 3)^8 (4x^2 - 7x)$ | (26) $f(x) = \frac{1}{x}$ | (27) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$ |
| (28) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+1}}{x^2 + 3}$ | (29) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$ | (30) $f(x) = x^3 e^{2x}$ |
| (31) $f(t) = \ln \frac{t^3}{e^t + \sqrt{t}}$ | (32) $f(x) = \ln \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ | (33) $f(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}}$ |

13) Comproveu que la funció $y = \ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$ satisfà la relació $xy' + 1 = e^y$

14) Calculeu la derivada de les funcions següents i determineu en cada cas $f'(0)$, si és possible:

- a) $f(x) = -3x + 4$
b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16} + \ln(x + 1)$
c) $f(x) = \ln(x)$

15) Calculeu les derivades primera i segona de cadascuna de les funcions següents:

- | | | |
|-----------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| (1) $y = (ax^2 - bx + c)^4$ | (2) $y = x^3 e^{1-4x}$ | (3) $y = \frac{8}{x^2 - 5}$ |
| (4) $y = \frac{x}{(x-1)^5}$ | (5) $y = (a - 2x)^5$ | (6) $y = e^{x^2+3x-2}$ |
| (7) $y = x^n e^x$ | (8) $y = \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{x}$ | (9) $y = \frac{3 \ln 2}{e^5 + 44}$ |

2.5 Rectes Tangents

- 16) Troba la recta tangent a la corba $f(x) = x^2 - 3x - 4$, en els punts de tall amb l'eix X.
- 17) Escriu la recta tangent a la funció $f(x) = x^2 - 6x$ en els punts de tall amb la recta $y = x$.
- 18) Troba en quin punt les rectes tangents a les corbes $f(x) = x^2 - 3x + 5$ i $g(x) = 3x^2 - 5x + 2$ paral·leles.
- 19) Troba en quins punts la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^2 + 2x - 3$ té pendent horitzontal.
- 20) Troba totes les rectes tangents a la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$ té que tenen de pendent -1 .
- 21) Troba la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{x+1}$ i que és ortogonal a la recta $y = 9x - 2$.
- 22) Troba la recta tangent i la recta normal a la corba $y = x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ en el punt $x = 1$.
- 23) Troba la tangent a la paràbola $y = x^2 + 3x + 1$ que sigui paral·lela a la recta $y = 2x - 5$.
- 24) Donada la funció $f(x) = x^2 + 3x - 4$ troba la recta tangent i la recta normal a la corba en els punts de tall amb l'eix X.
- 25) Troba la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^2 + 3x - 2$ que passa pel punt $(1, 0)$.
- 26) Donada la paràbola $y = (x - 1)^2$ troba les equacions de les rectes tangents que passen pel punt $(0, 0)$.

2.6 Determinació d'Extrems Relatius

- 27) Es vol fabricar una llauna de conserves en forma de cilindre amb una àrea total de 150 cm² i volum màxim. Determineu el radi i l'alçada.
- 28) La suma de les arestes d'un prisma recta de base quadrada és 96 metres. Troba les dimensions del que té volum màxim.
- 29) Troba les dimensions d'un pot cilíndric d'1 litre de capacitat per tal que es pugui construir amb la menor quantitat possible de material.
- 30) Volem construir un dipòsit en forma de prisma recta de base quadrada de 200 metres cúbics de volum. La superfície lateral es construïda amb un material que costa 90 Euros el metre quadrat i les dues bases amb un material que costa 70 Euros el metre quadrat. Quines seran les dimensions més econòmiques?
- 31) Troba el valor de k per tal que la funció $f(x) = x \cdot e^{kx}$ tingui un màxim en $x = 1$.
- 32) Determina els valors de a , b , c per tal que la funció $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tingui un màxim en $x = -1$, un mínim en $x = 0$ i a més, passi pel punt $(1,1)$.

2.7 Càlcul d'Integrals

- 33) Calculeu la funció (primitiva) que al derivar doni de les següents funcions

a) $y' = 3x^7$

b) $y' = e^{-3x}$

c) $y' = \frac{3}{x} - x^2$

d) $y' = \frac{4}{x+3}$

- 34) Calculeu les següents integrals:

(1) $\int \sqrt{x} \, dx$ (2) $\int \frac{dx}{x^2}$ (3) $\int e^{2x} \, dx$

(4) $\int (x+1)^{15} \, dx$ (5) $\int x\sqrt{1-x^2} \, dx$ (6) $\int \frac{16x}{x^2+9} \, dx$

(7) $\int e^{-5x} \, dx$ (8) $\int \frac{dx}{e^{12x+1}}$ (9) $\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} \, dt$

2.8 Càlcul d'Àrees.

- 35) Troba l'àrea del recinte limitat per la funció $y = x^3$ i l'eix de les X en l'interval $[1,3]$.
- 36) Troba l'àrea del recinte limitat per la funció $y = x^3$ i l'eix de les X en l'interval $[-1,0]$.
- 37) Troba l'àrea del recinte limitat per la funció $y = x^3$ i l'eix de les X en l'interval $[-1,2]$.
- 38) Troba l'àrea del recinte limitat per la recta $y = x + 2$ i la paràbola $y = x^2$.
- 39) Troba l'àrea del recinte limitat per les funcions $f(x) = x^2 - 6$ i $g(x) = -x^2 + 2$.
- 40) Troba l'àrea del recinte limitat per la recta $y = x$ i la funció $y = x^3$.
- 41) Calcula l'àrea de la regió limitada per la funció $f(x) = e^x$ i l'eix de les X entre -1 i 2.
- 42) Troba l'àrea de la regió limitada per la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 3x + 2$ i l'eix de les X.
- 43) Troba l'àrea del recinte limitat per les funcions $f(x) = x^2 + 3x - 2$ i $g(x) = 2x$.
- 44) Troba l'àrea de la regió limitada per la corba $f(x) = \sin(x)$ entre $[0, 2\pi]$ i l'eix de les X.
- 45) Troba l'àrea del recinte limitat per les funcions $f(x) = x^2 - 1$ i $g(x) = -x^2 + 1$.

3 ÀLGEBRA LINEAL

3.1 Operacions amb Matrius.

1) Realitza les següents operacions per les matrius donades en cada cas:

1. $A - 2BA$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. $2AB + A$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $CB - 2AB$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

4. $2AC - AB$; $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5. $BA + AB$; $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $2A^t + BC$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

7. $3(A - B) + 4A^2$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

8. $3(A + 2B) + 2B^2$; $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

9. $3CB^2 - (A + C)$; $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

10. $2CA - (C + 2B)$; $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

2) Realitza les següents operacions per les matrius donades en cada cas:

1. $2BA + B$; $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -x \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $2B - A$; $A = \begin{pmatrix} -1 & -x \\ 1 & -x-1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-x & x \end{pmatrix}$

3. $AC - B$; $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

4. $B - 2AB$; $A = \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

5. $AC - 2BA$; $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -x-1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$

6. $BA - 2B$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-x \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Donades les següents matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

a) Calculeu $A^2 + 2AB + B^2$

b) Calculeu $(A + B)^2$

4) D'una matriu A sabem que la seva primera fila és $(2 \ -1)$ i la segona $(0 \ 1)$. Troba la matriu A sabent que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5) Sigui una matriu 2×2 , $A = \begin{pmatrix} a & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Calculeu el valor de a sabent que $A \cdot A^t$ és una matriu

diagonal.

6)

a) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, calcula el valor de a per a que A^2 sigui la matriu nul·la.

b) Donada la matriu $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcula la matriu $(M^{-1} \cdot M^t)^2$.

7) Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, calcula $A^{-1} \cdot (B - A^t)$.

3.1 Operacions amb Determinants.

8) Calcula el valor del determinant:

$$\begin{array}{llllll}
 1. \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & 2. \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & 3. \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & 4. \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & 5. \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & 6. \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
 7. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & 8. \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} & 9. \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} & 10. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} & 11. \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} & 12. \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} & 13. \begin{vmatrix} -2 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} & 14. \begin{vmatrix} -1 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} & 15. \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} & 16. \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\
 17. \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} & 18. \begin{vmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -4 \\ 3 & -3 & -3 \end{vmatrix} & 19. \begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} & 20. \begin{vmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -6 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} & 21. \begin{vmatrix} -5 & -7 & 1 \\ 4 & 6 & -1 \\ -4 & -7 & 1 \end{vmatrix} & 22. \begin{vmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} & 23. \begin{vmatrix} 4 & 1 & -7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & -11 \end{vmatrix} & 24. \begin{vmatrix} 7 & -1 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \\ 2 & -5 & -2 \end{vmatrix}
 \end{array}$$

9) Calcula el rang de les matrius:

$$\begin{array}{llllll}
 1. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} & 4. \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} & 5. \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 6. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 4 \\ -7 & 8 & 7 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

10) Calcula el rang de la matriu en funció dels valors del paràmetre:

$$\begin{array}{lllll}
 1. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ m-3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & m+2 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 2 \\ -2 & m-4 & 3 \end{pmatrix} & 4. \begin{pmatrix} m-1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} & 5. \begin{pmatrix} -4 & 1 & m-3 \\ -3 & 1 & -2 \\ m-6 & 1 & -2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

3.3 Matrius inverses.

11) Calcula, si és possible, la inversa de les següents matrius:

$$\begin{array}{llllllll} 1. \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & 3. \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} & 4. \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} & 5. \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & 6. \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 7. \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} & 8. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 9. \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} & 10. \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix} & 11. \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} & 12. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} & 13. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 14. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

12) Troba els valors del paràmetre pels que no existeix inversa i calcula-la pels valors indicats:

$$\begin{array}{llll} 1. \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ m & -1 & 0 \end{pmatrix}; m = 3 & 2. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & m-4 \end{pmatrix}; m = 2 & 3. \begin{pmatrix} -3 & m-2 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; m = -1 & 4. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -3 & m+1 & -2 \end{pmatrix}; m = -2 \end{array}$$

13) Siguin $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Troba i calcula: $2A+4B$, $3A-2B$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, A^2 , A^{-1} .

14) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & 0 & p-1 \end{pmatrix}$

a) Troba el valor de p pel qual A té inversa.

b) Pel valor $p=2$, troba la matriu inversa.

c) Resol el sistema $\begin{cases} px=1 \\ x+py+z=3 \\ x+(p-1)z=4 \end{cases}$ per $p=2$ seguint el mètode de la matriu inversa.

3.5 Sistemes d'equacions.

15) Resol, si és possible, els següents sistemes d'equacions

$$\begin{array}{lllll}
 1. \begin{cases} 2x+y = 6 \\ x+y+z = 3 \\ 2x+y+z = 5 \end{cases} & 2. \begin{cases} -x-3y-z = -5 \\ x+2y+2z = 4 \\ 2x+5y+5z = 11 \end{cases} & 3. \begin{cases} -2x+y-5z = -23 \\ x-y+z = 5 \\ -2x+y-4z = -19 \end{cases} & 4. \begin{cases} -x+y-2z = -4 \\ -2x+3y-z = 1 \\ -x+2y = 2 \end{cases} & 5. \begin{cases} x+y+z = 5 \\ x+3y+z = 3 \\ x+3y+3z = 9 \end{cases} \\
 6. \begin{cases} -2x+2y+2z = -1 \\ 3x-2y-2z = -3 \\ -5x+3y+4z = 6 \end{cases} & 7. \begin{cases} -4x-8y-5z = -12 \\ -2x-3y-2z = -4 \\ 6x+11y+6z = 16 \end{cases} & 8. \begin{cases} -2x-2y+3z = 16 \\ -2x-4y+3z = 20 \\ -x-y+z = 7 \end{cases} & 9. \begin{cases} 2x-2y-2z = 5 \\ 3x-2y-3z = 7 \\ -4x+2y+3z = -9 \end{cases} & 10. \begin{cases} 2y-z = -2 \\ -2x+2y+2z = 1 \\ -4x+5z = 5 \end{cases} \\
 11. \begin{cases} x-y+3z = -7 \\ -x+2y-z = 4 \\ x-2y+z = -4 \end{cases} & 12. \begin{cases} -4x-5y+2z = 0 \\ -x-y+z = 1 \\ -6x-7y+4z = 2 \end{cases} & 13. \begin{cases} 2x+y+3z = -8 \\ -2x-4z = 12 \\ x+2z = -6 \end{cases} & 14. \begin{cases} x+y-z = 2 \\ -4x-4y+4z = -8 \\ 4x+4y-4z = 8 \end{cases} & 15. \begin{cases} -2x+y+z = 5 \\ -x+y+z = 5 \\ -6x+2y+2z = 9 \end{cases}
 \end{array}$$

16) Resol i classifica, segons el nombre de solucions, el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$